

Adventní kalendář 2025

4. ročník

Příklad 1:

Která přímka prochází bodem $(-2; 3)$ a svírá s osou x dvojnásobný úhel jako přímka $2x - 3y + 5 = 0$

Přímka procházející bodem $(-2; 3)$ má rovnici

$$y - 3 = k(x + 2)$$

Daná přímka svírá s osou x úhel φ , hledaná přímka 2φ

$$\text{Směrnice } k = \text{tg } 2\varphi = \frac{2 \text{tg } \varphi}{1 - \text{tg}^2 \varphi}$$

$$\text{Daná přímka: } 2x - 3y + 5 = 0$$

$$3y = 2x + 5$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$k = \frac{2}{3}$$

$$\text{tg } 2\varphi = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} =$$

$$= \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{9 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{12}{5}$$

Hledaná přímka má rovnici:

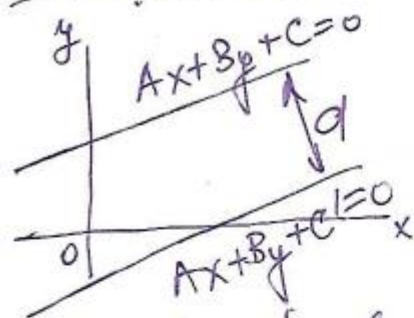
$$y - 3 = \frac{12}{5}(x + 2) \Rightarrow \boxed{12x - 5y + 39 = 0}$$

Příklad 2:

Určete vzdálenost rovnoběžných přímek p a q:

p: $8x + 15y + 51 = 0$ q: $8x + 15y + 17 = 0$

Dá se odvodit:



$$d = \left| \frac{c - c'}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Dané přímky: $8x + 15y + 51 = 0$
 $8x + 15y + 17 = 0$

$$d = \left| \frac{51 - 17}{\sqrt{8^2 + 15^2}} \right| = \frac{34}{17} = \underline{\underline{2}}$$

II. řešení!

Najdeme-li průmec zvolíme bod

$$8x + 15y + 51 = 0 \quad \times (3; -5)$$

$$8 \cdot 3 + 15 \cdot (-5) + 51 = 0$$

$$24 - 75 + 51 = 0$$

a hledáme ji to vzdálenost od druhé přímky

$$d = \left| \frac{8 \cdot 3 + 15 \cdot (-5) + 17}{\sqrt{8^2 + 15^2}} \right| = \left| \frac{24 - 75 + 17}{17} \right| = \frac{34}{17}$$

$$\underline{\underline{d = 2}}$$

Příklad 3:

Jaký úhel φ svírají přímky p a q ?

$p: 2x - 3y + 4 = 0$ a $q: x - y + 1 = 0$

$$2x - 3y + 4 = 0$$

$$3y = 2x + 4$$

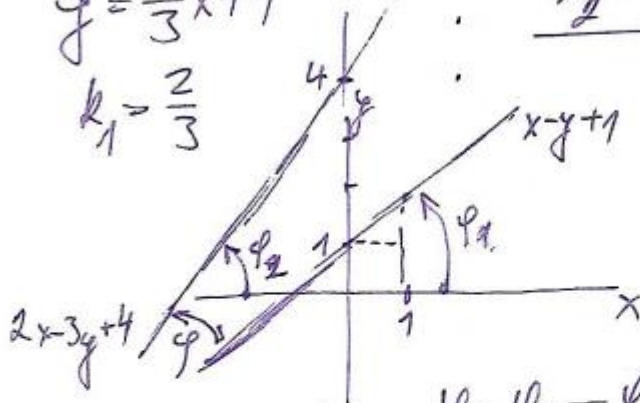
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$k_1 = \frac{2}{3}$$

$$x - y + 1 = 0$$

$$y = x + 1$$

$$k_2 = 1$$



$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$d\varphi \varphi = d\varphi (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$d\varphi \varphi = \frac{d\varphi \varphi_2 - d\varphi \varphi_1}{1 + d\varphi \varphi_2 \cdot d\varphi \varphi_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}$$

$$d\varphi \varphi = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{5}\right) \approx \underline{\underline{11^\circ 18' 36''}}$$

Příklad 4:

Která přímka prochází průsečíkem přímek

 $x - 2y + 1 = 0$, $2x - 3y + 4 = 0$ a má na ose y úsek $q = 1$?

I. způsob:
$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$$
 řešíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{r} -2x + 4y - 2 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \\ \hline y + 2 = 0 \\ y = -2 \end{array}$$

$$x = 2y - 1 = -5$$

$$P[-5; -2]$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \Rightarrow \frac{x_p}{p} + \frac{y_p}{1} = 1$$

$$\frac{-5}{p} - \frac{2}{1} = 1$$

$$-\frac{5}{p} = 3$$

$$p = -\frac{5}{3}$$

Hledaná rovnice je:

$$\frac{x}{-\frac{5}{3}} + \frac{y}{1} = 1 \Rightarrow -\frac{3x}{5} + y = 1/5$$

$$-3x + 5y = 5$$

$$0 = 3x - 5y + 5$$

II. způsob

Přímka, která prochází průsečíkem daných přímek má rovnici

$$(x - 2y + 1) - \lambda(2x - 3y + 4) = 0$$

$$\underbrace{x - 2y + 1 - 2\lambda x + 3\lambda y - 4\lambda}_{x(1-2\lambda)} = 0$$

$$x(1-2\lambda) + y(3\lambda-2) = 4\lambda-1$$

$$y = \frac{2\lambda-1}{3\lambda-2} x + \frac{4\lambda-1}{3\lambda-2}$$

↑
usek ma ose y

$$\frac{4\lambda-1}{3\lambda-2} = 1$$

$$4\lambda-1 = 3\lambda-2$$

$$\underline{\underline{\lambda = -1}}$$

Ηλεκανα formula ma' touce:

$$y = \frac{-3}{-5}x + \frac{-5}{-5}$$

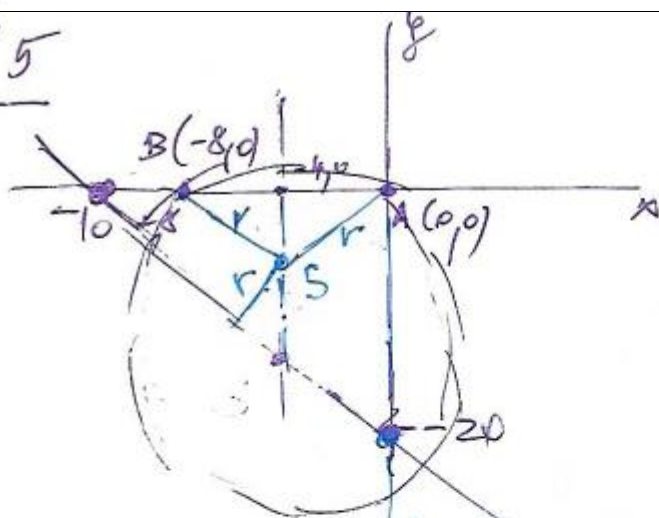
$$y = \frac{3x}{5} + 1 / \cdot 5$$

$$\boxed{0 = 3x - 5y + 5}$$

Příklad 5:

Která kružnice prochází body $(0;0)$ a $(-8;0)$ a dotýká se přímky $2x + y + 20 = 0$?

Př. 5



$$\begin{aligned}
 2x + y + 20 &= 0 \\
 y &= -2x - 20 \\
 \text{pro } y &= 0 \\
 0 &= -2x - 20 \\
 2x &= -20 \\
 \underline{x} &= \underline{-10}
 \end{aligned}$$

Střed hledané kružnice má střed na ose daných bodů tj. $x = -4$ a má vzdálenost od dané přímky r

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{|2x_s + y_s + 20|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2 \cdot (-4) + 20 + y_s|}{\sqrt{5}} = \\
 &= \frac{|12 + y_s|}{\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

Stejnou vzdálenost má bod S od počátku souřadnic

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{(x_A - x_s)^2 + (y_A - y_s)^2} = \sqrt{16 + y_s^2} \\
 \frac{|12 + y_s|}{\sqrt{5}} &= \sqrt{16 + y_s^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 144 + 24y_s + y_s^2 &= 5 \cdot (16 + y_s^2) \\
 144 + 24y_s + y_s^2 &= 80 + 5y_s^2
 \end{aligned}$$

$$0 = 4y_s^2 - 24y_s - 64 \quad | :4$$

$$0 = y_s^2 - 6y_s - 16$$

$$y_{s_{1/2}} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1}$$

$$y_{s_{1/2}} = \frac{6 \pm 10}{2} \begin{cases} \rightarrow y_{s_1} = 8 \\ \rightarrow y_{s_2} = -2 \end{cases}$$

Rovnice kružnice:

$$S(-4; 8) \quad r = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$$
$$\boxed{(x+4)^2 + (y-8)^2 = 80}$$

$$S(-4; -2) \quad r = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$
$$\boxed{(x+4)^2 + (y+2)^2 = 20}$$

Příklad 6:

Která kružnice se středem na přímce $x + 3y - 5 = 0$ se dotýká přímkou $3x + 4y - 40 = 0$, $4x - 3y + 5 = 0$?

$p: x_s + 3y_s - 5 = 0$ platí pro souřadnice S
 $S \in p$

- podmíně hledání souřadice r má stejnou vzdálenost od každé přímky

$$r = \frac{|3x_s + 4y_s - 40|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4x_s - 3y_s + 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$$\underbrace{|3x_s + 4y_s - 40|}_{(1)} = \underbrace{|4x_s - 3y_s + 5|}_{(2)}$$

Možnosti:

	(1)	(2)
a)	+	+
b)	+	-
c)	-	+
d)	-	-

$$x_s + 3y_s - 5 = 0$$

$$\underline{x_s = -3y_s + 5}$$

a) $3x_s + 4y_s - 40 = 4x_s - 3y_s + 5$

$$7y_s - x_s = 45$$

$$\frac{4}{7}y_s + 3y_s - 5 = 45$$

b) $3x_s + 4y_s - 40 = -4x_s + 3y_s - 5$

$$7x_s + y_s = 35$$

$$4(-3y_s + 5) + y_s = 35$$

$$-12y_s + 20 + y_s = 35$$

$$S_2 \left\{ \begin{array}{l} y_s = 0 \\ x_s = 5 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} 10y_s = 50 \\ y_s = 5 \\ \underline{\quad} \\ x_s = -10 \end{array}$$

$$r = \frac{|1 \cdot 5 + 3 \cdot 20 - 5|}{5} = \underline{\underline{10}}$$

$$r = \frac{|15 + 0 - 40|}{5} =$$

$$\underline{\underline{r = 5}}$$

krasnice a ad a), $(x+10)^2 + (y-5)^2 = 100$

id ad b), $(x-5)^2 + y^2 = 25$

ad c) $-3x_s - 4y_s + 40 = 4x_s - 3y_s + 5$

$35 = 7x_s + y_s$ via b)

ad d) $-3x_s - 4y_s + 40 = -4x_s + 3y_s - 5$

$x_s - 7y_s = -45$

$-3y_s + 5 - 4y_s = -45$

$50 = 3y_s + 10y_s$

$y_s = 5$ via a)

$x_s = -10$

Řešení y rovnice krasnice:

$(x+10)^2 + (y-5)^2 = 100$
$(x-5)^2 + y^2 = 25$

Příklad 7:

Která kružnice prochází průsečíky kružnic

 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 2y = 0$ a dotýká se přímky $x + y - 2 = 0$?

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad S(1; 0)$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 : x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad S(0; 1)$$

Průsečík těchto kružnic

$A(1; 1)$ $B(0; 0)$ ←
 plyne z $\{$ $x^2 + y^2 - 2x = 0$
 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ $\}$ +
 $-x^2 - y^2 + 2y = 0$ } +
 \hline
 $-2x + 2y = 0$
 $x = y$

Dosadíme do jedné z rovnic
 kružnic:

$$x^2 + x - 2x = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array} \right\}$$

Hledaná kružnice má procházet
 body A, B . Bod A leží na dotyčné
 přímce $x + y - 2 = 0 \Rightarrow$

Střed křivky 'loupanice' leží na úsečce A, B uprostřed, $r = \frac{|AB|}{2}$

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_S = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \\ = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ pol}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Křivka 'loupanice' má rovnici:

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$$
$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - x - y = 0}$$

II. řádek!

Hledaná kružnice má rovnici:

$$(x^2 + y^2 - 2x) - \lambda(x^2 + y^2 - 2y) = 0 \quad \leftarrow$$

po úpravě

$$\left(x - \frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(y + \frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2 = \frac{1+\lambda^2}{(1-\lambda)^2}$$

Vyhodíme novou soustavu:

$$x - \frac{1}{1-\lambda} = \xi \quad y + \frac{\lambda}{1-\lambda} = \eta$$

má přímka zale rovnici

$$\xi + \eta - 1 = 0$$

z podmínky dotyku

$$(1+1) \frac{1+\lambda^2}{(1-\lambda)^2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -1}}$$

$$x^2 + y^2 + 2x + x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y = 0 \quad | :2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + x - y = 0}$$

Příklad 8:

Určete pól přímky $2x - 3y = 1$ ke kružnici $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
a určete rovnice tečen z tohoto pólu k dané kružnici.

Přímka $2x - 3y = 1$ je standardně popsána k bodu $(x_0; y_0)$ což jsou souřadnice hledaného pólu:

$$\text{Kružnice: } x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$\underline{(x-1)^2 + y^2 = 1}$$

Pólka má rovnici

$$(x-1)(x_0-1) + y + y_0 = 1$$

po úpravě:

$$\frac{x_0-1}{x_0} \cdot x + \frac{y_0}{x_0} \cdot y = 1$$

porovnáme s pólkou:

$$\frac{x_0-1}{x_0} = 2 \Rightarrow x_0-1 = 2x_0$$

$$\underline{-1 = x_0}$$

$$y_0 \cdot y = -3 \Rightarrow y_0 = x_0 = -3$$

$$y_0 = (-3) \cdot (-1) = 3$$

$$\underline{P[-1; 3]}$$

Příklad 9:

Která tečna elipsy $81x^2 + 256y^2 = 20736$ má vzdálenost od počátku $d = 12$?

Nejdříve trochu teorie:

Rovnice pro dotyk přímky $y = kx + q$ s elipsou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (po úpravě) je podmínka

$a^2k^2 + b^2 = q^2$ která zajišťuje, že po dosazení přímky do elipsy vznikne kvadratická rovnice pro x (nebo y) s jediným řešením (diskriminant = 0), což znamená právě jeden průsečík, tedy dotyk.

Odvození:

1. **Dosazení:** Dosadíme $y = kx + q$ do standardní rovnice elipsy (po vydělení a^2b^2):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + q)^2}{b^2} = 1.$$

2. **Úprava na kvadratickou rovnici:** Převědeme na tvar $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$$b^2x^2 + a^2(k^2x^2 + 2kqx + q^2) = a^2b^2$$
$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + (2a^2kq)x + (a^2q^2 - a^2b^2) = 0.$$

3. **Podmínka dotyku:** Aby přímka elipsu (nebo obecně kuželosečku) *právě* se dotýkala, musí mít tato kvadratická rovnice právě jedno řešení, což nastane, když je její diskriminant $D = 0$.

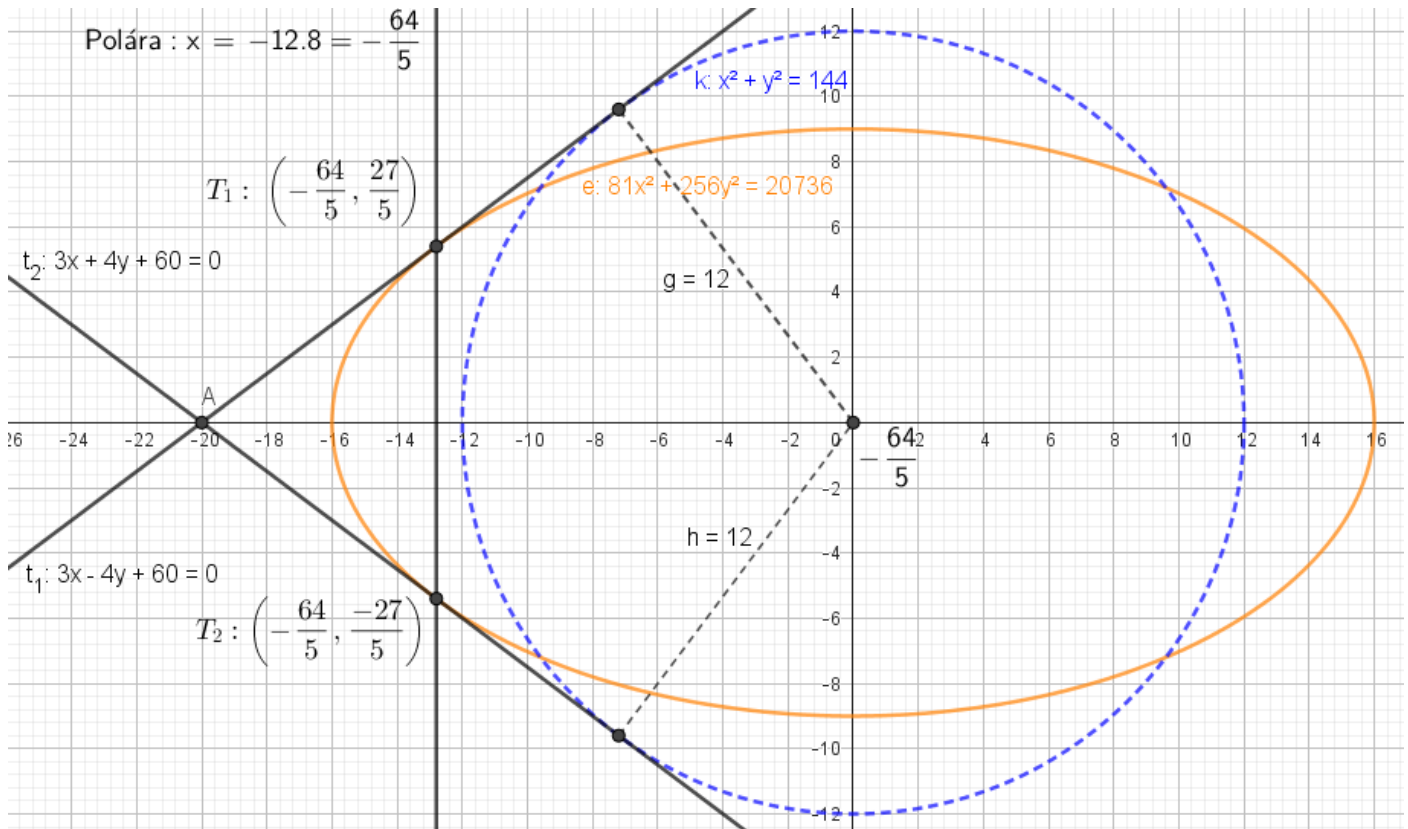
$$D = B^2 - 4AC = 0$$
$$(2a^2kq)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2q^2 - a^2b^2) = 0.$$

4. **Zjednodušení:** Po roznásobení a zkrácení (po dělení $4a^2$) se dostaneme k výsledné podmince:

$$a^2k^2q^2 - (b^2 + a^2k^2)(q^2 - b^2) = 0$$
$$a^2k^2q^2 - (b^2q^2 - b^4 + a^2k^2q^2 - a^2k^2b^2) = 0$$
$$-b^2q^2 + b^4 + a^2k^2b^2 = 0$$
$$b^2(b^2 + a^2k^2 - q^2) = 0$$

Protože $b \neq 0$, musí platit: $a^2k^2 + b^2 = q^2$ (nebo $q^2 = a^2k^2 + b^2$).

Řešení v GeoGebře:



Řešení výpočtem:

Rovnice tečny je přímka s obecnou rovnicí $y = kx + q$, která má od počátku vzdálenost $d = 12$ cm.

Pro velikost d platí:

$$d = 12 = \frac{|kx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \left\{ \text{Počátek má souřadnice } [x_0, y_0] = [0, 0] \right\} = \frac{q}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$12 = \frac{q}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

Současně se tato přímka dotýká dané elipsy: $81x^2 + 256y^2 = 20736$,

platí tedy vztah $a^2k^2 + b^2 = q^2$ kde $a^2 = 256 = 16^2, b^2 = 81 = 9^2$, tj. $16^2k^2 + 9^2 = q^2$

Budeme řešit soustavu modrých rovnic:

$$\left. \begin{array}{l} 12 = \frac{q}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ 16^2k^2 + 9^2 = q^2 \end{array} \right\} \Rightarrow k = \pm \frac{3}{4} \quad q = \pm 15$$

Hledané tečny mají rovnice: $3x - 4y + 60 = 0$ $3x + 4y + 60 = 0$

Příklad 10:

Polára elipsy $9x^2 + 16y^2 = 144$ tvoří na osách souřadnic úseky $p = 2$ a $q = 3$. Určete souřadnice pólu a určete rovnice tečen z tohoto pólu k dané elipse.

Polára má rovnici:

(vycházíme z rovnice elipsy ve středovém tvaru: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, kde pól má souřadnice $P = [x_0, y_0]$)

$$\frac{x \cdot x_0}{16} + \frac{y \cdot y_0}{9} = 1,$$

Současně, ale víme, že se jedná o přímku a podle zadání můžeme napsat její úsekový tvar rovnice:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad \dots \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

Porovnáním obou rovnic dostaneme souřadnice pólu:

$$\frac{x}{2} = \frac{x \cdot x_0}{16} \Rightarrow 16 = 2x_0 \Rightarrow x_0 = 8$$

$$\frac{y}{3} = \frac{y \cdot y_0}{9} \Rightarrow 9 = 3y_0 \Rightarrow y_0 = 3$$

Pól má souřadnice $P = [8, 3]$

Pro rovnice tečen k zadané elipse určíme poláru k bodu P a průsečíky poláry s elipsou:

Polára:

$$9x^2 + 16y^2 = 144 \quad P = [8, 3]$$

$$9 \cdot x \cdot 8 + 16 \cdot y \cdot 3 = 144 \Rightarrow 72x + 48y = 144 \Rightarrow 3x + 2y = 6$$

Průsečíky poláry a elipsy:

Z rovnice poláry vypočteme $y = -\frac{3}{2}x + 3$, které dosadíme do rovnice elipsy:

$$9x^2 + 16\left(-\frac{3}{2}x + 3\right)^2 = 144$$

$$45x^2 - 144x + 144 = 144$$

$$x \cdot (45x - 144) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{16}{5}$$

Průsečíky poláry a elipsy jsou:

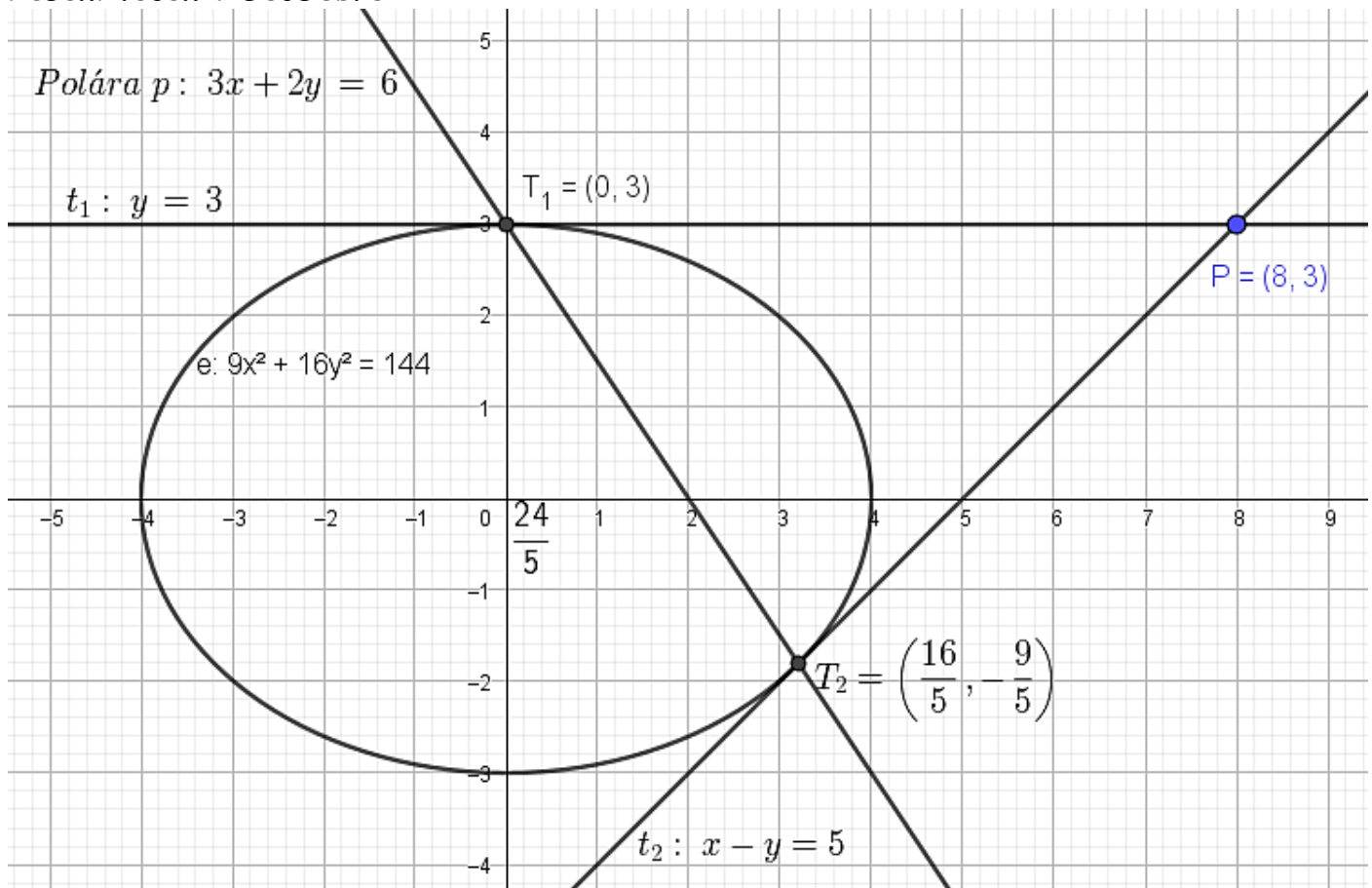
$$T_1 = [0, 3] \quad T_2 = \left[\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}\right]$$

Rovnice tečen:

$$t_1 : 9 \cdot x \cdot 0 + 16 \cdot y \cdot 3 = 144 \Rightarrow y = 3$$

$$t_2 : 9x \cdot \frac{16}{5} + 16y \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) = 144 \Rightarrow x - y = 5$$

Řešení tečen v GeoGebře:



Příklad 11:

Který bod elipsy $4x^2 + 9y^2 = 900$ má nejmenší a největší vzdálenost od přímky $x - 2y + 27 = 0$?

Opět trocha teorie:

1. Základní rovnice

Uvažujme elipsu v základní poloze se středem v počátku:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hledaná tečna má známou směrnici k , její rovnici tedy zapišeme ve směrnicovém tvaru s neznámým posunem q :

$$y = kx + q$$

2. Dosazení a úprava na kvadratickou rovnici

Abychom našli společné body, dosadíme výraz pro y z rovnice přímky do rovnice elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + q)^2}{b^2} = 1$$

Po vynásobení celé rovnice výrazem a^2b^2 a roznásobení závorky získáme:

$$b^2x^2 + a^2(k^2x^2 + 2kxq + q^2) = a^2b^2$$

Seskupíme členy podle mocnin x do tvaru kvadratické rovnice $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$$x^2(b^2 + a^2k^2) + x(2a^2kq) + (a^2q^2 - a^2b^2) = 0$$

3. Podmínka dotyku (Diskriminant)

Přímka je tečnou právě tehdy, když má s elipsou jeden společný bod. To odpovídá situaci, kdy je **diskriminant D roven nule**:

$$D = B^2 - 4AC = 0$$

$$(2a^2kq)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2q^2 - a^2b^2) = 0$$

Po algebraickém zjednodušení (vydělení $4a^2$ a roznásobení) dostaneme:

$$a^2k^2q^2 - (b^2q^2 - b^4 + a^2k^2q^2 - a^2k^2b^2) = 0$$

$$-b^2q^2 + b^4 + a^2k^2b^2 = 0$$

$$q^2 = a^2k^2 + b^2$$

4. Výsledná rovnice tečny

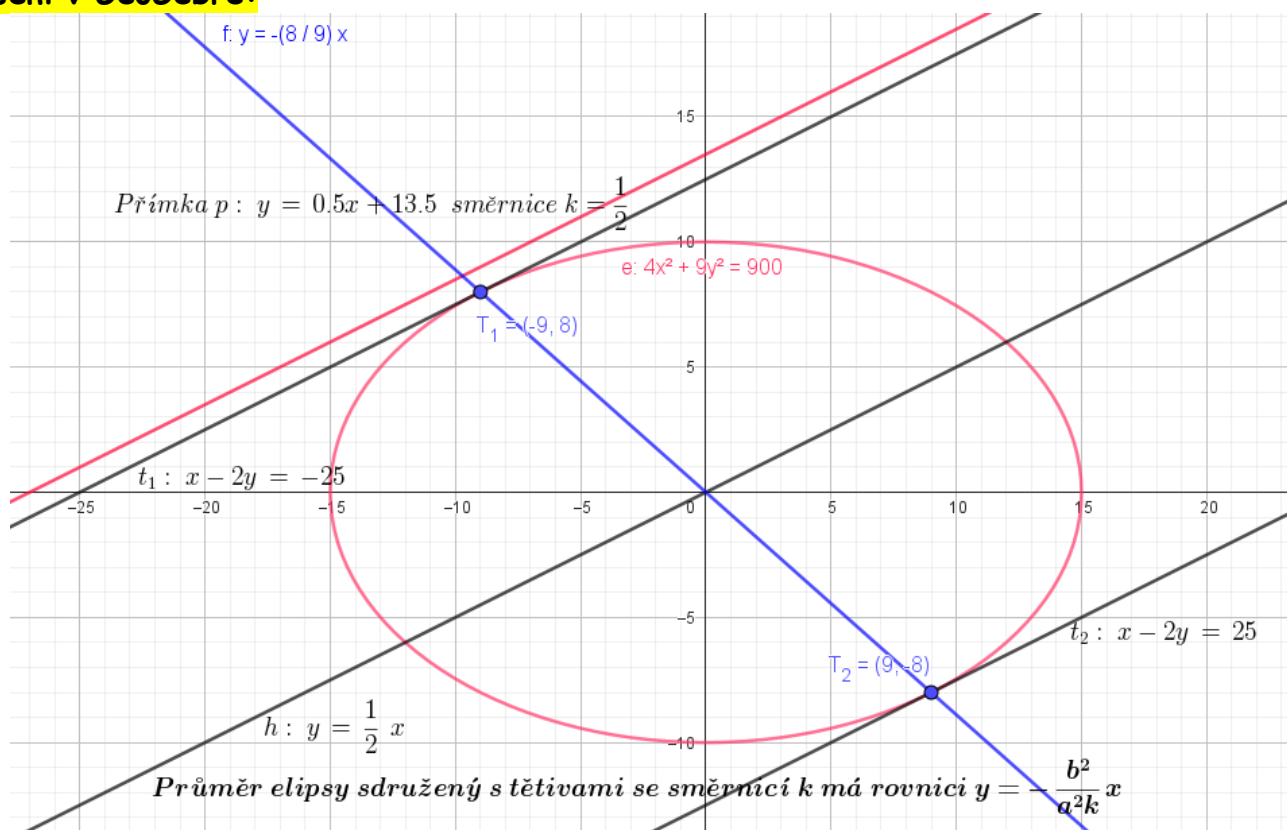
Získaný výraz pro $q = \pm\sqrt{a^2k^2 + b^2}$ dosadíme zpět do rovnice přímky:

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}$$

Body dotyku tečen s elipsou jsou vypočítány. Souřadnice bodu dotyku (x_0, y_0) jsou

dány vzorci $x_0 = \frac{\pm a^2k}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}$ a $y_0 = \frac{\pm b^2}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}$.

Řešení v GeoGebře:



Počtení řešení:

Daná přímka $x - 2y + 27 = 0$ má směrnici $k = \frac{1}{2}$. Stejnou směrnici budou mít tečna k dané

elipse u kterých získáme hledané vzdálenosti. Přímka $y = \frac{1}{2}x$ prochází středem dané elipsy

$$4x^2 + 9y^2 = 900 \left\{ \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1 \quad a = 15, b = 10 \right\} \text{ a nazývá se } \mathbf{\text{průměr elipsy}} \{ \mathbf{\text{Průměr elipsy}} \}$$

je tětiva procházející jejím středem, přičemž existuje nekonečně mnoho průměrů, které lze považovat za přímky procházející středem; nejdelší (hlavní osa) a nejkratší (vedlejší osa) průměry jsou na sebe kolmé a jsou to osy elipsy, jejichž délky jsou $2a$ (hlavní) a $2b$ (vedlejší), kde a a b jsou hlavní a vedlejší poloosy).

Průměr sdružený (Dva průměry elipsy (kružnice) se nazývají sdružené, jestliže tečny v koncových bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem, a naopak s průměrem elipsy) určíme z **rovnice elipsy a rovnic tětiv**:

Sdružené průměry elipsy jsou dva průměry, z nichž každý půlí tětivy rovnoběžné s druhým průměrem. Pokud má první průměr směrnici k , hledáme směrnici k' druhého (sdruženého) průměru.

1. Výchozí rovnice

Uvažujme elipsu v základní poloze se středem v počátku:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Mějme systém tětiv rovnoběžných s přímkou $y = kx + q$. Rovnice těchto tětiv jsou:

$$y = kx + q$$

2. Průsečíky tětivy s elipsou

Dosadíme rovnici přímky do rovnice elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + q)^2}{b^2} = 1$$

Po vynásobení a^2b^2 a roznásobení získáme kvadratickou rovnici pro x :

$$b^2x^2 + a^2(k^2x^2 + 2kqx + q^2) = a^2b^2$$
$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + (2a^2kq)x + (a^2q^2 - a^2b^2) = 0$$

3. Střed tětiv

Sdružený průměr je množina středů těchto tětiv. Střed tětivy $S[x_s, y_s]$ má x-ovou souřadnici rovnu aritmetickému průměru kořenů x_1, x_2 výše uvedené rovnice. Podle

Viětových vzorců ($x_1 + x_2 = -B/A$) platí:

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2a^2kq}{2(b^2 + a^2k^2)} = \frac{-a^2kq}{b^2 + a^2k^2}$$

Y-ová souřadnice středu leží na tětivě ($y_s = kx_s + q$):

$$y_s = k \left(\frac{-a^2kq}{b^2 + a^2k^2} \right) + q = \frac{-a^2k^2q + qb^2 + a^2k^2q}{b^2 + a^2k^2} = \frac{qb^2}{b^2 + a^2k^2}$$

4. Vztah mezi směrnicemi

Sdružený průměr je přímka procházející počátkem a body $[x_s, y_s]$. Jeho směrnice k' je dána podílem:

$$k' = \frac{y_s}{x_s} = \frac{\frac{qb^2}{b^2+a^2k^2}}{\frac{-a^2kq}{b^2+a^2k^2}} = \frac{qb^2}{-a^2kq} = -\frac{b^2}{a^2k}$$

Výsledná podmínka

Pro směrnice k a k' dvou sdružených průměrů elipsy platí:

$$k \cdot k' = -\frac{b^2}{a^2}$$

Tento vztah je klíčový pro konstrukci sdružených průměrů a používá se například v Rytzově konstrukci os elipsy. Pokud je elipsou kružnice ($a = b$), vztah se zjednoduší na $k \cdot k' = -1$, což odpovídá kolmosti průměrů.

Průměr sdružený se středovým průměrem má směrnici

$$k' = -\frac{b^2}{a^2 \cdot k} = -\frac{100}{225 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{8}{9}$$

Rovnice sdruženého průměru je $y = -\frac{8}{9}x$, který elips protíná v bodech T_1 a T_2 :

Po dosazení do rovnice elisy dostaneme $T_1 = [-9, 8]$ a $T_2 = [9, -8]$.

Rovnice tečen v těchto bodech jsou:

$$4x^2 + 9y^2 = 900 \Rightarrow t_1: 4xx_1 + 9yy_1 = 900$$

$$4x \cdot (-9) + 9y \cdot 8 = 900$$

$$-36x + 72y = 900 \quad |:36$$

$$-x + 2y = 25$$

$$4x^2 + 9y^2 = 900 \Rightarrow t_2: 4xx_2 + 9yy_2 = 900$$

$$4x \cdot (9) + 9y \cdot (-8) = 900$$

$$36x - 72y = 900 \quad |:36$$

$$x - 2y = 25$$

Určíme vzdálenosti bodů T_1 a T_2 od dané přímky $x - 2y + 27 = 0$:

$$d_1 = \frac{|x_1 - 2y_1 + 27|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-9 - 2 \cdot 8 + 27|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

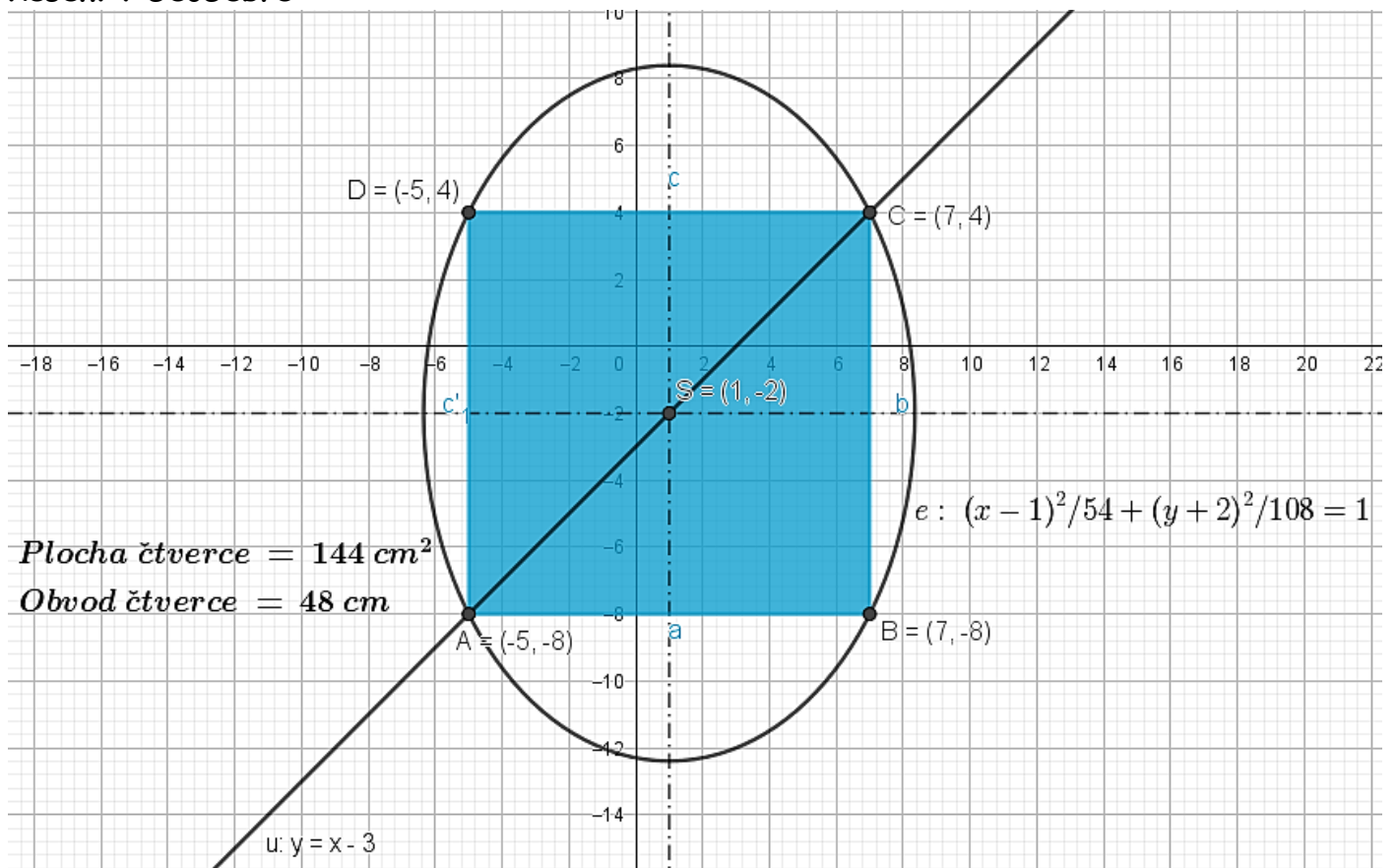
$$d_2 = \frac{|x_2 - 2y_2 + 27|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|9 - 2 \cdot (-8) + 27|}{\sqrt{5}} = \frac{52}{\sqrt{5}}$$

$$d_1 < d_2$$

Příklad 12:

Do elipsy $2x^2 - 4x + y^2 + 4y - 102 = 0$ je vepsán čtverec $ABCD$. Zjistěte jaký je jeho obvod a obsah.

Řešení v GeoGebře:



Početní řešení:

Upravíme rovnici do středového tvaru, zjistíme její střed a poloosy:

$$2x^2 - 4x + y^2 + 4y - 102 = 0$$

$$2(x-1)^2 - 2 + (y+2)^2 - 4 - 102 = 0$$

$$2(x-1)^2 + (y+2)^2 = 108$$

$$\frac{(x-1)^2}{54} + \frac{(y+2)^2}{108} = 1$$

$$S = [1, -2], a = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}, b = 6\sqrt{3}$$

Vrcholy čtverce najdeme jako průsečík rovnice úhlopříčky s danou elipsou:

Úhlopříčka čtverce svírá s osou x úhel 45° a prochází středem elipsy $S=[1,-2]$, její rovnice:

$$y - y_s = k \cdot (x - x_s)$$

$$y - (-2) = 1 \cdot (x - 1)$$

$$y = x - 3$$

Průsečíky přímky s elipsou:

$$2(x-1)^2 + (y+2)^2 = 108$$

$$2(x-1)^2 + (x-3+2)^2 = 108$$

$$2x^2 - 4x + 2 + x^2 - 2x + 1 = 108$$

$$3x^2 - 6x - 105 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0 \Rightarrow x_1 = 7, x_2 = -5$$

Určíme bod C čtverce : $C = [7,4]$, bod $B = [7,-8]$

Strana a čtverce = 12 cm Plocha je 144cm², obvod čtverce = 48 cm

Příklad 13:

Mezi 15 výrobky je 5 zmetků. Vybereme 3 výrobky. Jaká je pravděpodobnost, že jeden z nich je vadný, jestliže:

- a) vybereme všechny 3 najednou
- b) vybíráme po jednom bez vracení

Řešení:

$$\text{ad a) } P = \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{45}{91}$$

ad b) Možnosti: (V-vadný, D-dobry)

$$\text{VDD} \dots P_1 = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{15}{91}$$

$$\text{DVD} \dots P_2 = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{15}{91}$$

$$\text{DDV} \dots P_3 = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{15}{91}$$

To jsou všechny možné způsoby výběru:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{45}{91}$$

Příklad 14:

Ve třídě je 14 děvčat a 11 chlapců. Kolika způsoby lze vybrat 5-ti členné družstvo tak, aby v něm byla aspoň jedna dívka?

Aspoň jedna dívka znamená - 1 dívka nebo 2 dívky nebo 3 dívky nebo 4 dívky nebo 5-ti členné družstvo tvoří 5 dívek

$$1 \text{ dívka: } \binom{14}{1} \cdot \binom{11}{4} = 14 \cdot 330 = 4620$$

$$2 \text{ dívky: } \binom{14}{2} \cdot \binom{11}{3} = 91 \cdot 165 = 15015$$

$$3 \text{ dívky: } \binom{14}{3} \cdot \binom{11}{2} = 364 \cdot 55 = 20020$$

$$4 \text{ dívky: } \binom{14}{4} \cdot \binom{11}{1} = 1001 \cdot 11 = 11011$$

$$5 \text{ dívek: } \binom{14}{5} \cdot \binom{11}{0} = 2002 \cdot 1 = 2002$$

$$\text{Počet způsobů } \sum \text{všech : } 52668$$

součet

II. řešení:

$$\binom{25}{5} - \binom{11}{5} = 53130 - 462 = 52668$$

Počet všech 5tic

Počet 5tic jen z chlapců

Příklad 15:

V dodávce 30 ks výrobků je 9 zmetků. Určete pravděpodobnost, že při výběru 5 ks:

1. budou všechny zmetky,
2. budou 3 zmetky,
3. bude aspoň 1 zmetek,
4. budou aspoň 2 zmetky.

$$1. n = C_5(30) = 142\,506, m = C_5(9) = 126, P(A) = 0,0008842$$

$$P(A_1) = \frac{\binom{9}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{126}{142506} = 0,0008841733 = \mathbf{0,0008842}$$

$$2. n = C_5(30) = 142\,506, m = C_3(9) \cdot C_2(21) = 84 \cdot 210 = 17\,640, P(A) = 0,1238$$

$$P(A_2) = \frac{\binom{9}{3} \binom{21}{2}}{\binom{30}{5}} = \frac{84 \cdot 210}{142506} = 0,12378426172 = \mathbf{0,1238}$$

3. Jestliže jako jev A označíme "aspoň jeden z pěti vybraných je zmetek", pak platí, že $P(A) = 1 - P(A')$, kde A' je jev opačný - tedy "všechny vybrané jsou v pořádku". Příklad se počítá přes opačný jev, protože spočítat pravděpodobnost A' je snazší:

počet vybraných "pětic" z 21 výrobků, které jsou v pořádku

$$P(A') = \frac{\binom{21}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{20349}{142506} = 0,14279398762$$

$$P(A_3) = 1 - P(A'_3) = 1 - 0,14279398762 = 0,85720601238 \approx 0,8572$$

počet všech možných "pětic" vybraných z 30 výrobků

Lze to počítat i jinak:

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5)$, kde jev A_1 "mezi vybranými je právě 1 zmetek", jev A_2 "mezi vybranými jsou právě 2 zmetky", jev A_3 "mezi vybranými jsou právě 3 zmetky", jev A_4 "mezi vybranými jsou právě 4 zmetky" a jev A_5 "mezi vybranými je právě 5 zmetků".

A každou pravděpodobnost je nutné spočítat **zvlášť !!!** např. pro jev A_3 :

- tedy čitatel je součin počtu vybraných "trojic" z 9 výrobků - zmetků a počtu všech doplňkových "dvojic", které jsou vybrány z 21 výrobků v pořádku = každý výběr, který odpovídá "pěti", ve které jsou právě tři zmetky a dva dobré, jmenovatel je počet všech možných "pětic" vybraných z 31 výrobků. Pravděpodobnosti se sečtou, protože jevy A_1, \dots, A_5 jsou disjunktní = žádný výsledek příznivý jednomu jevu není příznivý jinému, takže užitíme kombinatorické pravidlo součtu.

V našem případě:

$$P(A_3) = \frac{\binom{9}{1} \cdot \binom{21}{4} + \binom{9}{2} \cdot \binom{21}{3} + \binom{9}{3} \cdot \binom{21}{2} + \binom{9}{4} \cdot \binom{21}{1} + \binom{9}{5} \cdot \binom{21}{0}}{\binom{30}{5}} =$$

$$= \frac{9 \cdot 5985 + 36 \cdot 1330 + 84 \cdot 210 + 126 \cdot 21 + 126 \cdot 1}{142506} =$$

$$= \frac{53865 + 47880 + 17640 + 2646 + 126}{142506} = \frac{122157}{142506} = 0,85720601238 \approx 0,8572$$

4. **Budou aspoň 2 zmetky:**

Opět budeme řešit jako „opačný jev“:

počet vybraných "pětic" z 21 výrobků, které jsou v pořádku

$$P(A'_4) = \frac{\binom{21}{5} + \binom{9}{1} \cdot \binom{21}{4}}{\binom{30}{5}} = \frac{20349 + 9 \cdot 5985}{142506} = \frac{74214}{142506} = 0,5207780725$$

$$P(A_4) = 1 - P(A'_4) = 1 - 0,5207780725 = 0,4792219275 \approx 0,47922$$

↓ Právě 1 zmetek a 4 dobré

počet všech možných "pětic" vybraných z 30 výrobků

Samozřejmě lze vypočítat tuto pravděpodobnost následovně:

- aspoň 2 zmetky znamená buď 2 nebo 3 nebo 4 nebo 5 zmetků tj.

$$2 \text{ zmetky: } \frac{\binom{9}{2} \cdot \binom{21}{3}}{\binom{30}{5}} = \frac{36 \cdot 1330}{142506} = \frac{47880}{142506}$$

$$3 \text{ zmetky: } \frac{\binom{9}{3} \cdot \binom{21}{2}}{\binom{30}{5}} = \frac{84 \cdot 210}{142506} = \frac{17640}{142506}$$

$$4 \text{ zmetky: } \frac{\binom{9}{4} \cdot \binom{21}{1}}{\binom{30}{5}} = \frac{126 \cdot 21}{142506} = \frac{2646}{142506}$$

$$5 \text{ zmetků: } \frac{\binom{9}{5} \cdot \binom{21}{0}}{\binom{30}{5}} = \frac{126 \cdot 1}{142506} = \frac{126}{142506}$$

$$P(A_2) = \frac{\binom{9}{2} \cdot \binom{21}{3} + \binom{9}{3} \cdot \binom{21}{2} + \binom{9}{4} \cdot \binom{21}{1} + \binom{9}{5} \cdot \binom{21}{0}}{\binom{30}{5}} =$$

$$= \frac{36 \cdot 1330 + 84 \cdot 210 + 126 \cdot 21 + 126 \cdot 1}{142506} =$$

$$= \frac{47880 + 17640 + 2646 + 126}{142506} = \frac{68292}{142506} = 0,4792219275 \approx 0,47922$$

Příklad 16:

Na sportovním kurzu jsou do závodu vybírána tříčlenná družstva, v nichž má každý závodník svoji funkci - vedoucí družstva, jednatel a kurýr. Kolika způsoby lze z 10 chlapců a 13 dívek sestavit takové družstvo, jestliže:

a) pro volbu družstva neplatí žádná omezující pravidla,

Na vedoucího družstva: 23 možností

Na jednatele: 22 možností

Na kurýra: 21 možností

Celkem $23 \cdot 22 \cdot 21 = 10626$

Hledáme trojice z 23 závodníků, záleží na pořadí - variace

$$V_3(23) = \frac{23!}{(23-3)!} = \frac{23!}{20!} = 21 \cdot 22 \cdot 23$$

b) vedoucí družstva musí být chlapec

(vedoucí družstva má být chlapec, tedy vybíráme jeden prvek z 10 chlapců a zároveň vybereme dva prvky ze zbývajících 22 (jednatel a kurýr může být chlapec i děvče)... když platí "a zároveň", tak musíme použít násobení!

Opět se jedná o variace: $V_1(10) \cdot V_2(22) = \frac{10!}{(10-1)!} \cdot \frac{22!}{(22-2)!} = 10 \cdot 21 \cdot 22 = 4620$

Na vedoucího družstva: 10 možností (10 chlapců)

Na jednatele: 22 možností

Na kurýra: 21 možností

Celkem $10 \cdot 22 \cdot 21 = 4620$

c) jednatelkou musí být dívka,

(jednatelkou musí být dívka (obdobná situace jako v b)... vybíráme jeden prvek z 13 děvčat a dva prvky ze zbývajících 22 děvčat a chlapců)... opět musíme vynásobit...

$$V_1(13) \cdot V_2(22) = \frac{13!}{(13-1)!} \cdot \frac{22!}{(22-2)!} = 13 \cdot 21 \cdot 22 = 6006$$

Na jednatele: 13 možností

Na vedoucího družstva: 22 možností

Na kurýra: 21 možností

Celkem $22 \cdot 13 \cdot 21 = 6006$

D) v družstvu mohou být nejvýše dva chlapci.

(v družstvu mohou být nejvýše dva chlapci, co to znamená? .. buď tam bude žádný chlapec, NEBO tam bude jeden chlapec, NEBO tam budou dva chlapci) .. když se používá "nebo" .. tak se možnost sčítají ..

$$\begin{aligned} V_3(13) + V_1(10) \cdot V_2(13) + V_2(10) \cdot V_1(13) &= \\ &= \frac{13!}{(13-3)!} + \frac{10!}{(10-1)!} \cdot \frac{13!}{(13-2)!} + \frac{10!}{(10-2)!} \cdot \frac{13!}{(13-1)!} = \\ &= 11 \cdot 12 \cdot 13 + 10 \cdot 12 \cdot 13 + 9 \cdot 10 \cdot 13 = 1716 + 1560 + 1170 = 4446 \end{aligned}$$

e) v družstvu mohou být nejvýše dvě dívky

(v družstvu mohou být nejvýše dvě dívky, co to znamená?... buď tam bude žádná dívka, NEBO tam bude jedna dívka, NEBO tam budou dvě dívky) .. když se používá "nebo" .. tak se možnost sčítají ..

$$\begin{aligned} &V_3(10) + V_1(13) \cdot V_2(10) + V_2(13) \cdot V_1(10) = \\ &= \frac{10!}{(10-3)!} + \frac{13!}{(13-1)!} \cdot \frac{10!}{(10-2)!} + \frac{13!}{(13-2)!} \cdot \frac{10!}{(10-1)!} = \\ &= 8 \cdot 9 \cdot 10 + 13 \cdot 9 \cdot 10 + 12 \cdot 13 \cdot 10 = 720 + 1170 + 1560 = 3450 \end{aligned}$$

Příklad 17:

Hodíme dvěma kostkami. Určete pravděpodobnost, že padne:

1. aspoň jedna 6,
2. právě součet 10,
3. právě jedna 3,
4. součet aspoň 5.

1) Aspoň jedna 6:

Hodíme 2 kostkami:

Mohou nastat případy:

$\{6, L\check{C}\}, \{L\check{C}, 6\}, \{6, 6\}$

$$P(A_1) = \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \right\} + \left\{ \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \right\} + \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \right\} = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36} = 0,3055$$

2) právě součet 10:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Celkem mohou nastat 3 možnosti, celkový počet možností = 36.

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0,08333$$

3) právě jedna 3:

Hodíme 2 kostkami:

Mohou nastat případy:

$\{3, L\check{C}\}, \{L\check{C}, 3\}$

4) součet aspoň 5:

Hodíme 2 kostkami:

Budeme řešit jako „opačný jev“, budeme počítat pravděpodobnost, kdy součet bude menší než 5 tj. bude 2 nebo 3 nebo 4:

Mohou nastat případy:

$\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,1\}, \{2,2\}, \{3,1\}$ 6 případů

$$P(A') = \frac{6}{36} \quad P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = 0,833333333333$$

$$P(A) = 0,8333$$

Příklad 18:

Třikrát za sebou hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že v druhém a ve třetím hodu hodíme více než v prvním hodu?

- Celkový počet všech možných výsledků (m) je zase $6^3 = 216$.
- Příznivé výsledky m_A :
- Pokud na první kostce padne šestka, je úloha zřejmě neřešitelná.
- Padne-li na první kostce pětka, existuje právě jedna možnost, jak splnit zadání - v obou dalších hodech nám musí padnout šestka. Máme jeden příznivý výsledek. =1
- Pokud na první kostce padne čtyřka, stačí, když nám pak padne buď pětka nebo šestka. Na jedné kostce máme tedy možnosti 5, 6 a na druhé 5, 6. Aplikováním klasického kombinatorického pravidla součinu získáváme $2 \cdot 2 = 4$.
- Jestliže padne trojka, může nám dále padnout čtyřka až šestka: $3 \cdot 3 = 9$ možností.
- Padne-li dvojka, zbývají nám čtyři vyšší čísla: $4 \cdot 4 = 16$.
- Padne-li jednička, máme nejvíce možností: $5 \cdot 5 = 25$.
- Ted' to všechno sečteme: $25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$.

• Výsledná pravděpodobnost je $\frac{55}{216}$.

Příklad 19:

V osudí jsou 2 červené a 4 zelené koule. Z osudí losujeme postupně 3 koule tak, že kouli vždy do osudí vrátíme. Jaká je pravděpodobnost, že první koule bude červená, druhá zelená a třetí červená?

Jedná se o 3 nezávislé pokusy s následujícími pravděpodobnostmi:

$$p(C_1) = \frac{1}{2} \quad p(Z_2) = \frac{1}{4} \quad p(C_3) = \frac{1}{2}$$

Pravděpodobnost tohoto pokusu

$$p(C_1, Z_2, C_3) = p(C_1) \cdot p(Z_2) \cdot p(C_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Pravděpodobnost, že první bude koule červená, druhá zelená a třetí červená je $\frac{1}{16}$.

Příklad 20:

V osudí je 9 bílých a 12 červených lístků. Náhodě vybereme dva lístky. Jaká je pravděpodobnost, že oba budou stejné barvy?

V osudí jsou lístky bílé a červené. Mohou nastat případy:

Vybereme 2 bílé lístky a žádný červený lístek:

$$\frac{\binom{9}{2} \cdot \binom{12}{0}}{\binom{21}{2}} = \frac{36 \cdot 1}{210} = \frac{36}{210}$$

Vybereme žádný bílý lístek a dva červené lístky:

$$\frac{\binom{9}{0} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{21}{2}} = \frac{1 \cdot 66}{210} = \frac{66}{210}$$

Pravděpodobnost, že vytažením 2 lístků, budou lístky stejné barvy je:

$$P(A) = \frac{36}{210} + \frac{66}{210} = \frac{102}{210} = 0,48571428571$$

$$P(A) = 0,48571$$

Příklad 21:

Hází se čtyřmi mincemi, které jsou vzájemně rozlišitelné. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu padne alespoň 3x líc?

Počet všech možností. Každá z mincí má dvě možnosti:

Padne buď rub, nebo líc.

Máme čtyři mince, tedy počet je: $n = 2^4 = 16$.

Počet příznivých možností si opět vypíšeme:

LLLR LLRL LRLL RLLL LLLL $m = 5$

L... líc, R... rub

Vidíme, že máme celkem 5 příznivých možností.

$$\frac{5}{16} = 0,3125$$

Příklad 22:

Hází se třemi kostkami. Určete pravděpodobnost, že součet bude menší než 17.

$$n = 6^3 = 216$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{212}{216} = 0,98148$$

Budeme řešit jako opačný jev:

zjistíme opak – počet případů kdy nám padne součet 18 nebo 17:

(6, 6, 6), (5, 6, 6), (6, 5, 6), (6, 6, 5) $m' = 4$

$$P'(A) = \frac{4}{216} \text{ pak } P(A) = 1 - P'(A) = 1 - \frac{4}{216} = \frac{212}{216} = 0,98148$$

Příklad 23:

Hazardní hráč hází třemi kostkami, položil G. Galileimu otázku:

"Mám vsadit na součet 11 nebo součet 12?"

Co mu Galileo odpověděl?

rozepište všechny trojice čísel, které mohou být vrženy a:

mají součet 11

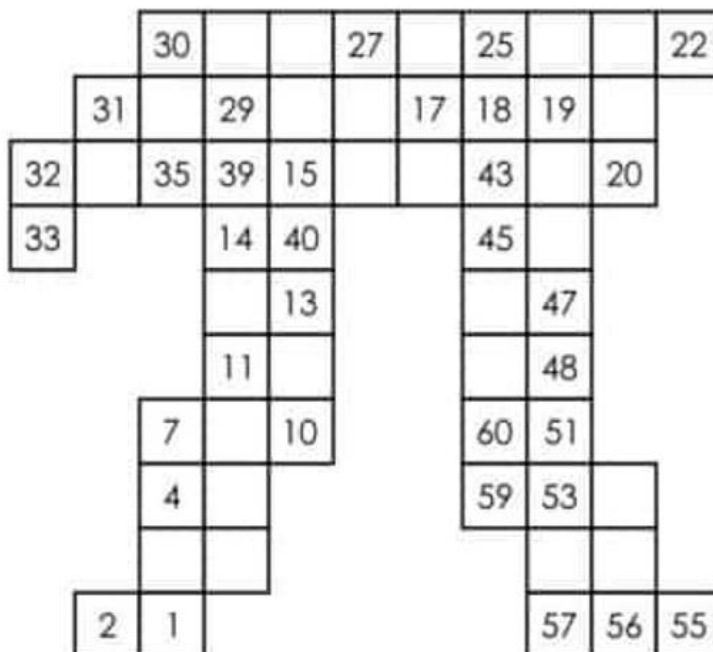
mají součet 12

a porovnat pravděpodobnosti.

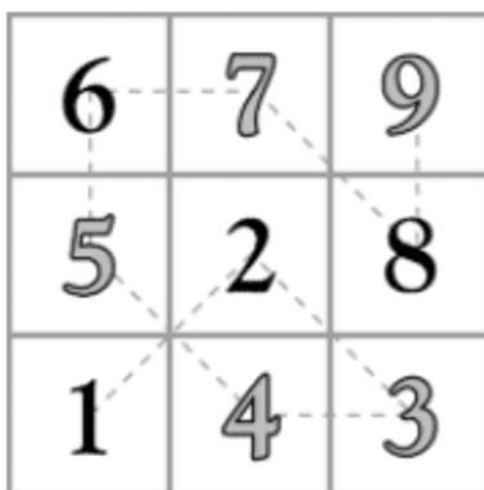
$s_1 = 1 + 4 + 6 = 11$	$s_{16} = 4 + 4 + 3 = 11$	$s_1 = 1 + 5 + 6 = 12$	$s_{16} = 5 + 2 + 5 = 12$
$s_2 = 1 + 5 + 5 = 11$	$s_{17} = 4 + 5 + 2 = 11$	$s_2 = 1 + 6 + 5 = 12$	$s_{17} = 5 + 3 + 4 = 12$
$s_3 = 1 + 6 + 4 = 11$	$s_{18} = 4 + 6 + 1 = 11$	$s_3 = 2 + 4 + 6 = 12$	$s_{18} = 5 + 4 + 3 = 12$
$s_4 = 2 + 3 + 6 = 11$	$s_{19} = 5 + 1 + 5 = 11$	$s_4 = 2 + 5 + 5 = 12$	$s_{19} = 5 + 5 + 2 = 12$
$s_5 = 2 + 4 + 5 = 11$	$s_{20} = 5 + 2 + 4 = 11$	$s_5 = 2 + 6 + 4 = 12$	$s_{20} = 5 + 6 + 1 = 12$
$s_6 = 2 + 5 + 4 = 11$	$s_{21} = 5 + 3 + 3 = 11$	$s_6 = 3 + 3 + 6 = 12$	$s_{21} = 6 + 1 + 5 = 12$
$s_7 = 2 + 6 + 3 = 11$	$s_{22} = 5 + 4 + 2 = 11$	$s_7 = 3 + 4 + 5 = 12$	$s_{22} = 6 + 2 + 4 = 12$
$s_8 = 3 + 2 + 6 = 11$	$s_{23} = 5 + 5 + 1 = 11$	$s_8 = 3 + 5 + 4 = 12$	$s_{23} = 6 + 3 + 3 = 12$
$s_9 = 3 + 3 + 5 = 11$	$s_{24} = 6 + 1 + 4 = 11$	$s_9 = 3 + 6 + 3 = 12$	$s_{24} = 6 + 4 + 2 = 12$
$s_{10} = 3 + 4 + 4 = 11$	$s_{25} = 6 + 2 + 3 = 11$	$s_{10} = 4 + 2 + 6 = 12$	$s_{25} = 6 + 5 + 1 = 12$
$s_{11} = 3 + 5 + 3 = 11$	$s_{26} = 6 + 3 + 2 = 11$	$s_{11} = 4 + 3 + 5 = 12$	
$s_{12} = 3 + 6 + 2 = 11$	$s_{27} = 6 + 4 + 1 = 11$	$s_{12} = 4 + 4 + 4 = 12$	$p_{12} = \frac{25}{n} = \frac{25}{216} = 0,1157$
$s_{13} = 4 + 1 + 6 = 11$		$s_{13} = 4 + 5 + 3 = 12$	
$s_{14} = 4 + 2 + 5 = 11$	$p_{11} = \frac{27}{n} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8} = 0,125$	$s_{14} = 4 + 6 + 2 = 12$	$p_{11} > p_{12}$
$s_{15} = 4 + 3 + 4 = 11$		$s_{15} = 5 + 1 + 6 = 12$	$v = 11$

Příklad 24:**HÁDANKY U π SYMBOLU – HIDOKU**

Doplňte chybějící čísla do mřížky ve tvaru pí tak, aby každé číslo souviselo s dalším číslem vodorovně, svisle nebo diagonálně.

**Ukázka řešení:**

Hádanky Hidoku (původně vydané jako Hidato Puzzles) jsou výtvořem Dr. Gyory M. Benedeka, izraelského matematika. Hebrejské slovo „hida“ znamená hádanku. V hádance hidato dostanete mřížku s výběrem čísel, která jsou již vyplněna. Vaším úkolem je doplnit chybějící čísla tak, aby se každé číslo spojovalo s dalším číslem vodorovně, svisle nebo diagonálně. 1 se musí spojovat s 2, 2 se musí spojovat s 3 atd.



V okénku byla zadána čísla 1,2,6 a 8, ostatní se doplňují

Řešení:

			30	37	28	27	26	25	24	23	22
		31	36	29	38	16	17	18	19	21	
32	34	35	39	15	41	42	43	44	44	20	
33			14	40			45	46			
			12	13			49	47			
			11	9			50	48			
		7	8	10			60	51			
		4	6				59	53	52		
		3	5					58	54		
2	1							57	56	55	